NIVELACION EN MATEMATICA

EJERCITACION BASICA

- **Marta Casamitjana**
- **Aldo V. Figallo**
- **Graciela Guala**
- **Viviana Oscherov**
- **Graciela Paolini**
- **Carlos Robledo**

Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur

Bahía Blanca **Argentina**

2003

Índice General

Programa del curso de nivelación

1. **Número real**

   Operaciones. Propiedades. Identidades usuales. Ecuaciones lineales con una incógnita. Inecuaciones de la forma $ax + b \leq cx + d$. Otras inecuaciones.

2. **Funciones**

   Definición. Dominio. Imagen. Función real. Gráfico de una función real. Determinación del Dominio y la imagen de una función real. Composición de funciones.

3. **Funciones lineales**

   Funciones lineales y rectas. Ecuaciones de la recta. Paralelismo y perpendicularidad. Distancia entre dos puntos.

4. **Ecuaciones lineales con dos incógnitas**

   Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Clasificación, resolución e interpretación geométrica.

5. **Funciones cuadráticas**

   Función cuadrática y parábolas con eje vertical. Ecuación de segundo grado, raíces reales. Interpretación geométrica.

6. **Polinomios en una variable**

   Polinomios y funciones polinómicas. Operaciones. Regla de Ruffini. Teorema del resto. Raíces reales de un polinomio.

7. **Funciones trigonométricas**

   Sistemas de medición de un ángulo. Definición de las funciones *seno*, *coseno* y *tangente*. Reducción al primer cuadrante. Ecuaciones trigonométricas. Resolución de triángulos rectángulos y problemas de aplicación.

1 Números reales

$\mathbb{R}$ denotará el conjunto de los números reales. Los símbolos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ representarán respectivamente a los conjuntos de los números naturales, enteros, racionales y de los irracionales, respectivamente.

Para resolver los ejercicios de este bloque se sugiere tener en cuenta el Apéndice de la sección 1.2 de la página 15.

1.1 Ejercicios

1.1 Exprese la suma de los números reales a, b y c de tres maneras diferentes. Indicar sobre la linea de puntos la o las propiedades utilizadas:

(i) $a+b+c=$

....

(ii) $a+b+c=$

....

(iii) $a+b+c=$

....

1.2 Establezca si las siguientes igualdades son verdaderas cualesquiera sean los números reales a, b, c, p, q, x, y, z o son falsas. Justifique las respuestas teniendo en cuenta las propiedades de los números reales:

(a) $a+(b+c)=a+(b+c)$,

(b) $(x+y)+z=y+(x+z)$,

(c) $x-(y-z)=(x-y)-z$,

(d) $2+(a-b)=2+(b-a)$,

(e) $a+(8-b)=(8-b)+a$,

(f) $\pi+x+y=y+\pi+x$,

(g) $p-(q-r)=(q-r)-p$,

(h) $(7\cdot x)\cdot y=7\cdot(x\cdot y)$,

(i) $(x:y):z=x:(y:z)$,

(j) $x\cdot(a+3)=(5\cdot a)+(x\cdot 3)$.

1.3 Indique cuales son las propiedades de los números reales que se pueden aplicar para afirmar la validez de las siguientes igualdades:

(a) $(x+2)+a=2+(a+x)$,

(b) $a\cdot(b\cdot c)=(c\cdot b)\cdot a$,

(c) $a\cdot(x+2)+a\cdot(x+3)=a\cdot(2x+5)$.

1.4

(a) Muestre que la igualdad

(i) $\dfrac{a}{b+c} = \dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{c}$

no es válida en general.

(b) Encuentre una "terna" de números a, b y c que satisfagan la igualdad (i). Halle otra terna que también la satisfaga.

(c) Demuestre la propiedad

(ii) $(a+b) : c = (a : c) + (b : c)$, para todo $a, b, c \in I\!R$, $c \neq 0$. b

(sugerencia: Recuerde que $\frac{1}{c} = c^{-1}$ y aplique R9 del apéndice.)

1.5 Coloque entre los números el signo que corresponda (+, $-$,$\cdot$, :, paréntesis) de modo que se verifique el resultado indicado en la última columna:

$$\begin{array}{ccccl} 5 & 5 & 5 & 5 & = 4, \\ 5 & 5 & 5 & 5 & = 0, \\ 5 & 5 & 5 & 5 & = 6, \\ 5 & 5 & 5 & 5 & = 3. \end{array}$$

1.6

(i) Detemine el 11 % de:

(a) 100, (b) 200, (c) 191.

(ii) Explique el significado de la expresión : a es el 11 % de b.

(iii) Sea a el c % de b. Obtenga una fórmula para determinar :

(a) el valor a, conocidos b y c,
(b) el valor b, conocidos a y c,
(c) el valor c, conocidos a y b.

1.7 Utilizando solamente la definición y las propiedades de la potenciación calcule:

(i) $\left(\dfrac{1 - \dfrac{1}{4}}{1 - \left(-\dfrac{5}{6}\right)} \right)^2$,

(ii) $\left(\dfrac{3}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}+(3)^{-1}}\cdot\dfrac{2^{-1}}{2^{2}}\right)^{-1}.$

1.8 Utilizando solamente propiedades de las operaciones sobre los números reales calcule:

(i) $\left(\sqrt{9}+\sqrt[3]{27}\right)\cdot\left(\sqrt{9}-\sqrt[3]{27}\right)$,

(ii) $\sqrt[4]{(-9)^2}-\sqrt{(-3)^2}$,

(iii) $\dfrac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{-24}}+\sqrt[3]{-9}\ \sqrt[3]{-24}$,

(iv) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-\frac{2}{3}}$,

(v) $(3^2+3^2)^{\frac{1}{2}}$,

(vi) $\left(1-\dfrac{75}{100}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(\dfrac{81}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\dfrac{8}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

1.9 Escriba la expresión dada en la forma $a\cdot r^n$, donde $a,r\in\mathbb{R}$ y $n\in\mathbb{N}$:

(i) $\dfrac{5^{n-1}}{3^{n+2}}$, (ii) $\dfrac{8^{2n}}{3^{n-2}}$, (iii) $\dfrac{2^{\frac{n}{2}+1}}{5^{\frac{n}{3}}}$, (iv) $\dfrac{4^{\frac{n+1}{3}}}{6^{\frac{2n-2}{4}}}$.

1.10

(i) Justifique las siguientes afirmaciones:

(a) La suma, resta, producto y cociente,

(b) si a y b son racionales entonces el $a\%$ de b lo es,

(c) la suma de un racional y un irracional siempre es un irracional,

(d) si $r\neq 0$ es racional y b es irracional entonces br es irracional.

(ii) ¿ El producto y el cociente de un racional por un irracional son irracionales?

1.11 Analice la validez de las siguientes igualdades sobre los números reales:

(i) $\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$,

(ii) $\dfrac{x+y}{y}=y$,

(iii) $(p+q)^2 = p^2 + q^2$,

(iv) $\dfrac{b-a}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} = -(\sqrt{b}+\sqrt{a})$,

(v) $\dfrac{a+b}{b} = 1 + \dfrac{a}{b}$.

1.12 Encuentre el error en el siguiente razonamiento:

(1)	b	$=$	a,	[por hipótesis]
(2)	$b \cdot a$	$=$	a^2,	[multiplicando ambos miembros de (1) por a]
(3)	$b \cdot a - b^2$	$=$	$a^2 - b^2$,	[restando b^2 a ambos miembros de (2)]
(4)	$b \cdot (a-b)$	$=$	$(a-b)\cdot(a+b)$,	[sacando factor común b en el primer miembro de (3) y factoreando diferencia de cuadrados] en el segundo miembro]
(5)	b	$=$	$a+b$,	[cancelando $(a-b)$ en (4)]
(6)	b	$=$	$b+b$,	[reemplazando a por b en (5)]
(7)	b	$=$	$2b$,	[de (6)]
(8)	1	$=$	2.	[simplificando b en (7)]

1.13 Resuelva y determine a cuáles de los conjuntos numéricos, $I\!N$, $Z\!\!Z$, $Q\!\!\!\!I$, $I\!R$, no pertenece cada uno de los resultados:

(a) $2^{-1} \cdot 2^{-3} \cdot 2^{-4}$

(b) $2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4}$

(c) $\sqrt[3]{-1+\dfrac{7}{8}} - \sqrt{-\dfrac{3}{4}+1}$

(d) $\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-2}} - \sqrt[3]{-27}$

(e) $2\sqrt{8} + 3\sqrt{18} - 5\sqrt{50}$

1.14

(i) Compruebe que para todo $z \in I\!R$, $z \geq 0$, se verifica la igualdad $\left(\sqrt{\sqrt[3]{z}}\,\sqrt[6]{z}\right)^3 = z$.

(ii) ¿Es necesaria la condición $z \geq 0$ en la igualdad indicada en (i)?

1.15 Usando solamente las propiedades de las operaciones sobre $I\!R$, analice la validez de las siguientes igualdades. Justifique la respuesta.

(a) $\sqrt{9 \cdot 25} = 3 \cdot 5 = 15$,

(b) $\sqrt{9 + 25 + 1} = 3 + 5 + 1 = 9$,

(c) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{2}$,

(d) $\sqrt{-16} \cdot \sqrt{-25} = \sqrt{(-16) \cdot (-25)} = \sqrt{400} = 20$,

(e) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$,

(f) $\sqrt[3]{8 - 64} = 2 - 4 = -2$.

1.16 Sea $a \in I\!R$. Analice para que valores de a es posible calcular:

$$\text{(a)}\quad \sqrt{(a^2)}, \quad \text{(b)}\quad \left(\sqrt{a^2}\right)^2, \quad \text{(c)}\quad \sqrt{(-a)^2}, \quad \text{(d)}\quad \sqrt{-a^2}, \quad \text{(e)}\quad \left(\frac{a^{-\frac{3}{4}}}{a^{\frac{5}{4}}}\right)^{-\frac{1}{8}}.$$

Justifique la respuesta en todos los casos.

1.17 Simplifique las siguientes expresiones numéricas, teniendo en cuenta que en ningún caso se anulan los denominadores:

(a) $\left(\dfrac{a^{-3/4}}{a^{5/4}}\right)^{-1/8}$, (b) $\dfrac{\left(a^{1/3}\right)^{-2} \left(a^{-3}\right)^{1/2}}{\left(a^{-1/4}\right)^{0}}$,

(c) $\dfrac{27\,(x^2 - 2\,x)}{36\,x}$, (d) $\dfrac{16 - a^4}{8 + 4a + 2a^2 + a^3}$,

(e) $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{x+3}{x^2 + 4x + 4}$.

1.18 Utilizando las propiedades de las operaciones reales y *operando algebraicamente* compruebe la validez de las siguientes igualdades numéricas, para los valores en que ambos miembros están definidos simultaneamente:

1. $\left(-\dfrac{1}{a}\right)^{-2} + a^0 + a^2 = 1 + 2a^2$,

2. $\left[\dfrac{z}{\left(\dfrac{1}{z}\right)^{-1} + z^{-1}} \cdot \dfrac{z^{-1}}{z^3}\right]^{-1} = z^2[z^2 + 1]$,

3. $y \cdot \dfrac{x^{-1} + \left(\dfrac{1}{x}\right)^{-2}}{x^{-1} y^{-2}} = y^3 [1 + x^3],$

4. $\left[\dfrac{1}{1+(-a)}\right]^0 - \left[\dfrac{1+(-a)}{1-(-a)}\right]^2 = \dfrac{4a}{(1+a)^2},$

5. $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 + \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = 2(a+b),$

6. $a^0 - a^2 = (1-a)\,(1+a),$

7. $\dfrac{x}{\sqrt{y}} = \sqrt{y},$

8. $\dfrac{x}{\sqrt{y}} = \dfrac{x}{y}\,\sqrt{y},$

9. $\dfrac{z-p}{\sqrt{z}-\sqrt{p}} = \sqrt{z} + \sqrt{p},$

10. $\sqrt{5z^3} + \sqrt{3z^3} - \sqrt{20z^3} = (\sqrt{5} + \sqrt{3} - 2\,\sqrt{5})\, z\,\sqrt{z},$

11. $\sqrt{z^3} + 2\,\sqrt{z^5} + \sqrt{5z^7} = (z + 2z^2 + \sqrt{5}z^3)\,\sqrt{z},$

12. $\sqrt[3]{8z^4} + \sqrt[3]{27z^4} - 3\,\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}z^4} = \dfrac{7}{2}\,z\,\sqrt[3]{z},$

13. $x^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}} - 3\,x^{-\frac{4}{3}} = \dfrac{x^2 + x - 3}{x\,\sqrt[3]{x}},$

14. $x^{-\frac{1}{2}}\,y^{-\frac{2}{3}} + y^{\frac{5}{3}}\,x^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1 + yx}{x\,y\,\sqrt{x}\,\sqrt[3]{y^2}},$

15. $\dfrac{2(b+2) + \sqrt{4b^2 - 16}}{2\,\sqrt{b+2}} = \sqrt{b+2} + \sqrt{b-2},$

16. $\dfrac{2\,\sqrt{c+2}}{2\,(c+2) + \sqrt{4c^2 - 16}} = \dfrac{\sqrt{c+2} - \sqrt{c-2}}{2}.$

1.19 Factorizando el numerador y simplificando, compruebe que se verifican las siguientes igualdades numéricas:

1. $\dfrac{4\,(x-2)^2 - (4x+12)\,(2x-4)}{(x-2)^4} = (-4)\,\dfrac{8+x}{(x-2)^3},$

2. $\dfrac{(x-2)^3 - 3\,(x^2 - 4x + 4)\,(8+x)}{(x-2)^6} = (-2)\,\dfrac{x+13}{(x-2)^4},$

3. $\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}-\frac{2}{3}\,x^2\,\left(x^2-1\right)^{-\frac{2}{3}}}{\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^2}=\dfrac{x^2-3}{3\,\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}},$

4. $\dfrac{6x\,\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}-8x\,\left(x^2-3\right)\,\sqrt[3]{x^2-1}}{9\,\left(\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}\right)^2}=\dfrac{2x\left(9-x^2\right)}{9\,\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^7}}.$

1.20 Determine si las siguientes ecuaciones tienen o no solución en $\mathbb{Q}$:

(a) $t+2=7,$ (b) $3x-5=12,$ (c) $x-2\pi=0,$

(d) $z+3=\left(\frac{1}{2}\,z-4\right)\,2,$ (e) $\sqrt{2}-x=1,$ (f) $\frac{3}{4}\,x-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$

1.21 Resuelva las siguientes ecuaciones:

(i) $9x-5=-3x+4,$

(ii) $\dfrac{1-x}{2}=\dfrac{1+x}{3},$

(iii) $3\left(x-2\right)\left(x-5\right)=0,$

(iv) $\dfrac{4x-6}{12}-\dfrac{3x-8}{4}=\dfrac{2x-9}{6}-\dfrac{x-4}{8},$

(v) $\dfrac{5y^2+12}{10y+2}=\dfrac{4y-3}{5y+1}+\dfrac{y}{2},$

(vi) $\dfrac{5x+10}{x+3}=4,$

(vii) $\dfrac{5x-3}{4-x^2}=\dfrac{5+x}{2+x}+\dfrac{x-3}{2-x},$

(viii) $\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{2}x-3\right)=0,$

(ix) $\dfrac{\left(8x^2+4x\right)\left(2x-1\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+3\right)}=0,$

(x) $\sqrt{3x-2}=4,$

(xi) $2x=\dfrac{-x}{x+1},$

(xii) $\dfrac{2x^2-2x^3+8}{x^2}+2x=2,$

(xiii) $3\left(x^2-1\right)+2x=3\left(x-1\right)\left(x+1\right)+\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}x.$

1.22 Resuelva los siguientes problemas:

(i) La suma de dos números pares consecutivos es 74. ¿Cuáles son dichos números?

(ii) Sabiendo que la altura de un rectángulo es la mitad de su base y su superficie mide $32\,\mathrm{cm}^2$. ¿Cuánto miden la base y la altura?

(iii) Un filatelista dice poseer un número de estampillas tal que, triplicado y sumado a la mitad de su consecutivo es igual a 6122. ¿Cuántas estampillas posee?

(iv) En una cancha de tenis el largo, que es de 26 m, excede en 2 m al doble de su ancho. ¿Cuál es su ancho?

(v) El señor López retiró el 25 % de sus ahorros para comprarse una campera cuyo costo es de \$ 250. ¿Cuántos pesos tenía ahorrados?

(vi) Se vende mercadería en \$ 77,60 perdiendo el 3 % de lo que costó. ¿Cuál es el costo?

(vii) ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado cuyo perímetro es 10 cm mayor que el que el perímetro de un rectángulo de largo igual al lado del cuadrado y de ancho igual a 4 cm?

(viii) Asfaltar una calle costó \$ 3300. Los vecinos pagaron el doble de lo que aportó la municipalidad, mientras que la Provincia contribuyó con las dos terceras partes del aporte municipal. ¿Cuánto dinero pusieron los vecinos?

(ix) El gerente de una tienda marca todos los artículos de tal forma que la ganancia es 1/4 del precio de venta. Halle el precio de venta de un artículo que cuesta \$ 3,60. ($G=I-C$, la ganancia es igual a la diferencia entre el ingreso y el costo).

1.23 Dada la desigualdad $-8<3$, indique las desigualdades que se obtienen si:

(i) se suma 7 a ambos miembros,

(ii) se duplican ambos miembros,

(iii) se resta -3 a ambos miembros,

(iv) se dividen ambos miembros por 12,

(v) se dividen ambos miembros por -6,

(vi) se elevan al cuadrado ambos miembros.

1.24

(i) ¿Cuáles de las siguientes desigualdades son correctas?

(a) $-2 < 20$, (b) $-4 > -16$, (c) $-3 < 4/9$,

(d) $6/7 < 34/39$, (e) $\dfrac{-5}{7} < \dfrac{-44}{59}$, (f) $-\pi < -3,1416$.

(ii) Escriba los siguientes números en forma decreciente:

(a) $-\dfrac{5}{3}, \dfrac{12}{5}, \dfrac{\pi}{2}, 0, \dfrac{27}{6}, -\dfrac{11}{4}, -\dfrac{23}{5}$, (b) $2, -\dfrac{1}{3}, -\pi, 0, \dfrac{3}{5}, \dfrac{13}{6}, -\sqrt{3}, \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$.

1.25 Dé ejemplos de números a, b, c, d, tales que verifiquen:

(i) $a < 0 < b$ y $a^2 < b^2$,

(ii) $a < 0 < b$ y $a^2 > b^2$,

(iii) $a < b$ y $\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$,

(iv) $a < b$, $c < d$ y $ac < bd$,

(v) $a < b$, $c < d$ y $ac > bd$,

(vi) $a < b$, $c < d$ y $\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{d}$,

(vii) $a < b$, $c < d$ y $\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{d}$.

1.26 Sean a y b números reales tales que $a < b$. Establezca si las siguientes desigualdades son verdaderas o falsas. Justifique las respuestas teniendo en cuenta las propiedades de la relación $<$.

(a) $a + 4 < b + 4$, (b) $2\,b < 2\,a$,

(c) $3 - a > 3 - b$, (d) $1/a < 1/b$,

(e) $(a - b)\,(b - a) > 0$, (f) $a^2 < b^2$,

(g) $a^2 < a\,b$, (h) $a^3 < a^2\,b$.

1.27 Sean $a, b \in I\!R$. Verifique, partiendo de la hipótesis $a < b$, las siguientes afirmaciones. Al justificar las respuestas, indique en cada caso, las propiedades de la relación $<$ que aplica.

(i) $\dfrac{b + 2a}{3} < \dfrac{a + 2b}{3}$,

(ii) $a < \dfrac{a + 2b}{3} < b$.

1.28 Verifique las siguientes afirmaciones:

(i) $a < b < 0 \Rightarrow a^2 > b^2$,

(ii) $a < b < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a^2} < \dfrac{1}{b^2}$,

(iii) $a < b < 0 \Rightarrow -2a^2 + 5 < -2ab + 5$.

1.29 Escriba los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ en forma de intervalos y represéntelos gráficamente.

(i) $A = \{x : x \in \mathbb{R}, x \leq 3\}$,

(ii) $B = \{x : x \in \mathbb{R}, x > 2\}$,

(iii) $C = \{x : x \in \mathbb{R}, -8 \leq x \leq 8\}$,

(iv) $D = \{x : x \in \mathbb{R}, -4 < x < 4\}$,

(v) $E = \{x : x \in \mathbb{R}, -1 < x \leq 3\}$,

(vi) $F = \{x : x \in \mathbb{R}, 2x - 4 > 4x - 7\}$.

1.30 Verifique las siguientes afirmaciones:

(a) $x \in [2, 4] \Rightarrow 2x - 3 \in [1, 5]$,

(b) $x \in (1, 2) \Rightarrow 4x - 6 \in (-2, 2)$,

(c) $x - 3 \in (-3, 2) \Rightarrow x \in (0, 5)$.

1.31 Halle los extremos a y b del intervalo, de modo que las siguientes afirmaciones sean verdaderas:

(i) $x \in (4, 9) \Leftrightarrow 5 - 3x \in (a, b)$,

(ii) $x \in (-1, 3) \Leftrightarrow 2 - 5x \in (a, b)$.

1.32 Verifique las siguientes afirmaciones:

(i) $x \in [-2, 4] \Rightarrow x^2 \in [0, 4]$,

(ii) $x \in [-1, 3] \Rightarrow x^2 \in [0, 9]$,

(iii) $x \in (-2, 1] \Rightarrow x^2 \in [0, 4)$,

(iv) $x \in (-2, 0) \Rightarrow x^2 \in (0, 9)$.

1.33 Un estudiante afirma que el conjunto de soluciones de la inecuación $x + 1 < 4x + 4$ es $\mathbb{R}$, basado en la siguiente argumentación:

(1) $x + 1 < 4x + 4,$ [por hipótesis]

(2) $x + 1 < 4\,(x + 1),$ [sacando factor común 4 en el segundo miembro de (1)]

(3) $1 < 4.$ [simplificando en (2)]

En primer lugar indique si tal afirmación es verdadera y en segundo lugar determine si la argumentación es correcta.

1.34 Determine el conjunto de soluciones de las siguientes inecuaciones. Escríbalo como un intervalo y grafíquelo.

(i) $3x - 1 \geq 0,$

(ii) $7 - \frac{1}{3}x > 3,$

(iii) $4x - 2 \leq 4(x + 1),$

(iv) $4x - 3 \leq 4(x - 7),$

(v) $\dfrac{1 - x}{-3} < 1,$

(vi) $2x + 11 > 10 - 6x,$

(vii) $2 - 4x > 4x - 2.$

1.35 Resuelva los siguientes problemas:

(i) María tiene que subir rollos de tela en un ascensor en el que se pueden cargar hasta 350 kg. ¿Cuál es el mayor número de rollos que puede subir en cada viaje, si ella pesa 55 kg y cada rollo pesa 18 kg ?

(ii) En el manual de instrucciones de una moto se aconseja no llevar una carga superior a los 90 kg . Entre qué valores podrá variar el peso de un acompañante si el conductor pesa 58 kg.

(iii) Se quiere alquilar un auto para un viaje y las opciones con que se cuentan son:

  (a) un costo fijo de \$100 a lo que se agrega \$20 por km recorrido,

  (b) un cargo inicial de \$ 400 más \$ 17 por km recorrido.

  ¿Cuánto habrá que recorrer para que la opción (a) sea la más conveniente?

(iv) El perímetro de un rectángulo no debe superar los 30 cm, mientras que el largo debe ser de 8 cm. ¿Cuál es el conjunto de valores que puede tomar el ancho?

(v) La señora Frías pesa 25 kg menos que su esposo. La suma de los pesos de ambos es por lo menos 110 kg más que el de su hija, que pesa la mitad del peso de la señora Frías. ¿Cuál es el peso mínimo de la señora?

(vi) Para fabricar un producto se sabe que los costos fijos son de \$ 3.600 y los variables de \$ 4 por unidad. Si el precio de venta del producto es de \$ 10, ¿cuántos deben venderse como mínimo para que la empresa no tenga pérdida?

1.36 Obtenga el conjunto determinado por cada una de las siguientes inecuaciones y haga una representación gráfica del mismo:

(i) $x\,(x-5) \leq 0$,

(ii) $(x-2)\,(x-6) > 0$,

(iii) $(x+1)\,(x-2) < 0$,

(iv) $x\,(x-2)\,(x+3) \geq 0$,

(v) $(x-1)^2\,(x+4) < 0$,

(vi) $(x-2)^3 > 0$,

(vii) $(3x-1)\,(2x+3) \geq 0$,

(viii) $(x-1)^3\,(x+1)^4 < 0$,

(ix) $\dfrac{3-2x}{x} \leq 0$,

(x) $\dfrac{1+2x}{2-3x} > 0$,

(xi) $\dfrac{3}{x} - 2 \geq 0$,

(xii) $2 + \dfrac{1}{x} > 1$,

(xiii) $\dfrac{3}{x} - 2 \leq 4$,

(xiv) $\dfrac{2x-1}{x} < 3$,

(xv) $\dfrac{x}{x+2} < 1$,

(xvi) $\dfrac{3x-1}{2x+3} > 3$,

1.2 Apéndice

En esta sección se enuncian las propiedades fundamentales o axiomas que se utilizarán en el curso, que satisfacen las operaciones de suma $(+)$, producto $(\cdot)$ y la relación $<$ definidas sobre $\mathbb{R}$. Todas ellas se utilizarán durante el desarrollo del curso.

Axiomas para + y ·

Cualesquiera que sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, se verifican:

(R1) $a + (b + c) = (a + b) + c$,

(R2) $a + b = b + a$,

(R3) existe $0 \in \mathbb{R}$, llamado cero, tal que $0 + a = a$,

(R4) para cada $a \in \mathbb{R}$, existe un único $b \in \mathbb{R}$, llamado el opuesto de a, tal que $a + b = 0$,

(R5) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,

(R6) $a \cdot b = b \cdot a$,

(R7) existe $1 \in \mathbb{R}$, llamado uno, $1 \neq 0$ tal que $1 \cdot a = a$,

(R8) para cada $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, existe un único $c \in \mathbb{R}$, llamado el inverso de a, tal que $a \cdot c = 1$,

(R9) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Axiomas para <

Cualesquiera que sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, se verifican:

(R10) vale una, y sólo una de las tres condiciones siguientes:

(i) $a = b$, (ii) $a < b$, (iii) $b < a$,

(R11) $a < b$ y $b < c \Rightarrow a < c$.

Axiomas para +, · y <

Cualesquiera que sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, se verifican:

(R12) $a < b \ \Rightarrow a + c < b + c$,

(R13) $a < b$ y $0 < c \Rightarrow \ a \cdot c < b \cdot c$.

Notaciones útiles

Para cada $a, b \in I\!R$ se denotará con:

(1) $-a$, al opuesto de a; $-a$ es el único real que verifica $a + (-a) = 0$.

(2) $a - b$, a $a + (-b)$, esto es, $a - b = a + (-b)$.

(3) $\dfrac{1}{a}$ $(a \neq 0)$, al inverso de a. En algunos casos, para lograr mayor claridad, se usarán las notaciones a^{-1} o $1/a$ para indicar a dicho inverso. Entonces para cada a, $a \neq 0$, $\dfrac{1}{a}$ es el único real que verifica $a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$.

(4) $\dfrac{a}{b}$ $(b \neq 0)$, al número real $a \cdot \dfrac{1}{b} = a \cdot b^{-1}$, esto es $\dfrac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$. El real $\dfrac{a}{b}$ se llama el cociente de a por b, a es el numerador y b el denominador.

Se escribirá

(5) $a \leq b$, si vale una de las dos propiedades siguientes: (i) $a = b$, (ii) $a < b$. La fórmula $a \leq b$ se lee: *a precede a b* o *a es menor o igual que b.*

Las propiedades mas importantes de la relación $\leq$ son:

(O1) $a \leq a$,

(O2) $a \leq b$ y $b \leq a \Rightarrow a = b$,

(O3) $a \leq b$ y $b \leq c \Rightarrow a \leq c$,

(O4) dados $a, b \in I\!R$ vale alguna de las dos propiedades siguientes:

(i) $a \leq b$, (ii) $b \leq a$.

(6) $a > b$, si se cumple que $b < a$. La fórmula $a > b$ se lee: *a es mayor que b.*

(7) $a \geq b$, si se verifica que $b \leq a$. La fórmula $a \geq b$ se lee: *a sucede a b* o *a es mayor o igual que b.*

(8) $a < b < c$, para indicar que $a < b$ y $b < c$.

(9) $a \leq b \leq c$, para indicar que $a \leq b$ y $b \leq c$.

(10) Se dirá que $a \in I\!R$ es positivo, si se verifica que $a > 0$ y negativo si $a < 0$.

(11) Con la terminología indicada en (10) y teniendo en cuenta R10, se puede decir que *todo número real es positivo o negativo o nulo.*

(12) De R1 y R5, se puede escribir $a + b + c$ y $a \cdot b \cdot c$ en lugar de $a + (b + c)$ y $a \cdot (b \cdot c)$.

(13) Para simplificar, cuando no hay lugar a dudas se puede escribir ab en lugar de $a \cdot b$.

Otras propiedades

A partir de los axiomas anteriores se pueden demostrar las siguientes propiedades:

(T1) $-(-a) = a$,

(T2) $a + b = a + c \Rightarrow b = c$,

(T3) $a0 = 0$,

(T4) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$,

(T5) $(-a)(-b) = ab$,

(T6) $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ o $b = 0$,

(T7) $ab = ac$ y $a \neq 0 \Rightarrow b = c$,

(T8) $(a^{-1})^{-1} = a$, $a \neq 0$,

(T9) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$,

(T10) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$, $b \neq 0$, $d \neq 0$,

(T11) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ca}{cb}$, $c \neq 0$,

(T12) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$,

(T13) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$,

(T14) $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{ad}{bc}$,

(T15) $\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b}$,

(T16) $\dfrac{a}{b} \neq 0 \Rightarrow \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$,

(T17) $a < b$ y $c < d \Rightarrow a + c < b + d$,

(T18) $a + c < b + c \Leftrightarrow a < b$,

(T19) $0 < a < b$ y $0 < c < d \Rightarrow ac < bd$,

(T20) $a < b \Leftrightarrow -b < -a$,

(T21) $0 < a \Leftrightarrow -a < 0$,

(T22) $0 < 1$,

(T23) $a < b, c < 0 \Rightarrow ac > bc$,

(T24) $a < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} < 0$,

(T25) $a > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} > 0$,

(T26) $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$,

(T27) $a < b < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a} < 0$,

(T28) $0 < a < b \Rightarrow a^2 < b^2$, donde $a^2 = aa$, $b^2 = bb$,

(T29) $a < b < 0 \Rightarrow b^2 < a^2$,

(T30) $a \neq 0 \Leftrightarrow a^2 > 0$,

(T31) (1) $ab > 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a > 0 \text{ y } b > 0 \\ \text{o} \\ a < 0 \text{ y } b < 0 \end{array} \right.$,

(2) $ab < 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a > 0 \text{ y } b < 0 \\ \text{o} \\ a < 0 \text{ y } b > 0 \end{array} \right.$,

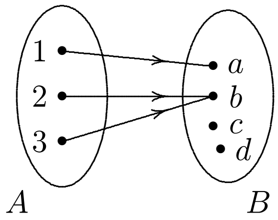
(3) $\dfrac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a > 0 \text{ y } b > 0 \\ \text{o} \\ a < 0 \text{ y } b < 0 \end{array} \right.$,

(4) $\dfrac{a}{b} < 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a > 0 \text{ y } b < 0 \\ \text{o} \\ a < 0 \text{ y } b > 0 \end{array} \right.$.

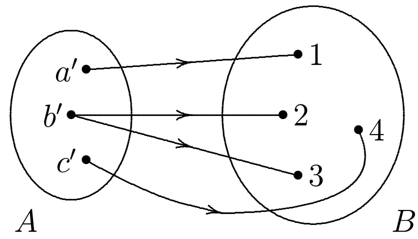
2 Funciones

2.1 Indique justificando las respuestas si los siguientes diagramas definen una función $f : A \longrightarrow B$

(i)



(ii)



2.2 Indique justificando las respuestas si las siguientes tablas definen un función $f : A \longrightarrow B$:

(i) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{e, m, p, q\}$

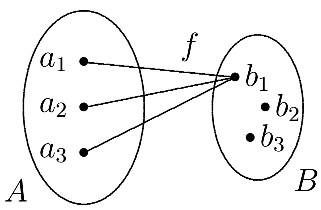
x	$f(x)$
a	e
b	m
c	p
d	q

(ii) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{v, w, x\}$

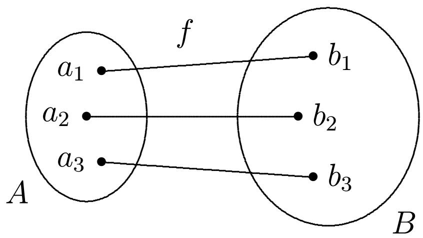
x	1	2	3	4
$f(x)$	v	w	w	v

2.3 Los diagramas y la tabla que se dan a continuación definen en cada caso una función $f : A \longrightarrow B$. Sabemos que $Dom(f) = A$. Halle en cada caso $Im(f)$:

(i)



(ii)

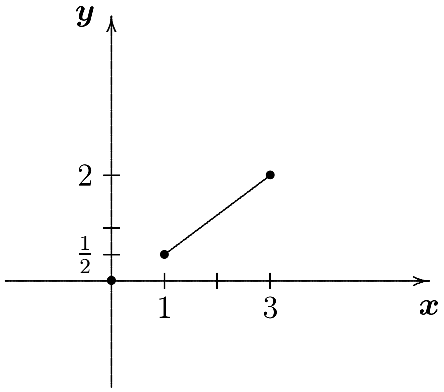


(iii) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a', b', c', d'\}$

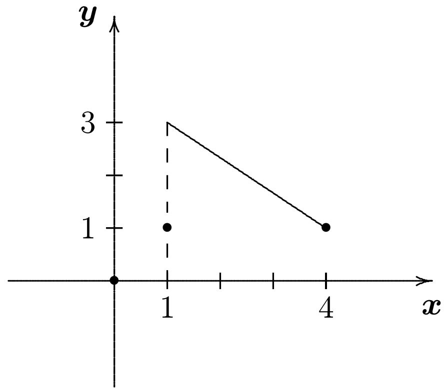
x	a	b	c	d
$f(x)$	a'	c'	d'	a'

2.4 Determine si los siguientes gráficos corresponden a una función f de A en B:

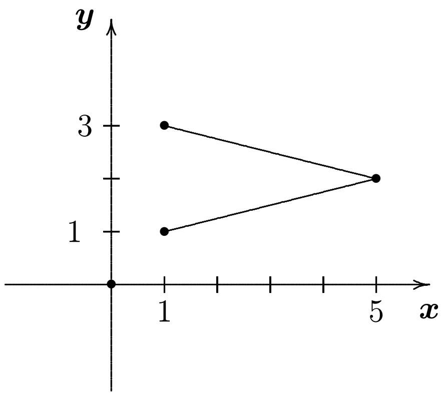
(i) $A = [1,3]$, $B = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$



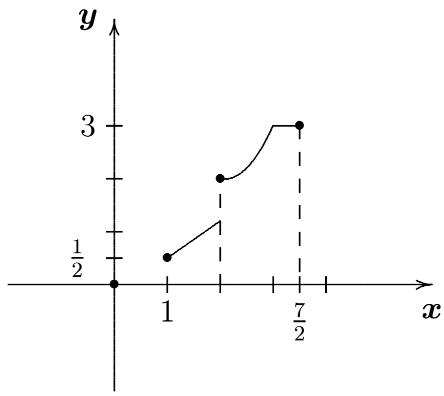
(ii) $A = [1,4]$, $B = [1,3]$



(iii) $A = [1,5]$, $B = [1,3]$



(iv) $A = \left[1, \frac{7}{2}\right]$, $B = \left[\frac{1}{2}, 3\right)$



2.5 Exprese:

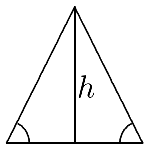
(i) el área del círculo en función del diámetro,

(ii) el área del cuadrado en función de la diagonal,

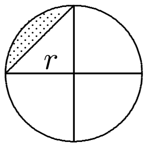
(iii) el área del triángulo equilátero en función del lado.

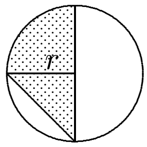
2.6 Exprese:

(i) el área y el perímetro de un triángulo isósceles como funciones de la altura, sabiendo que la base mide 6 cm.

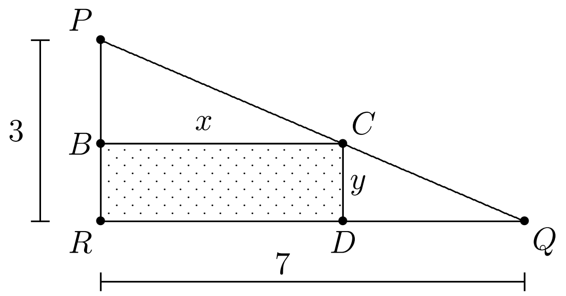


(ii) el área de la figura sombreada, en función del radio r del círculo.

(a) 

(b) 

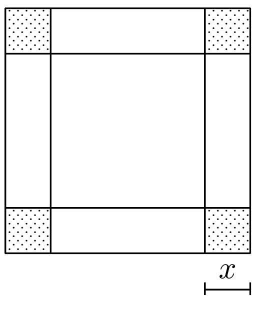
2.7 Con los datos de la siguiente figura:

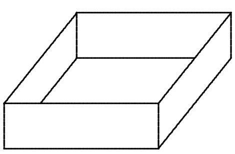


(i) Determine una función $A = f(y)$ que permita calcular el área del rectángulo $RBCD$, cualquiera sea el punto C del segmento $\overline{PQ}$.

(ii) Calcule el área del rectángulo $RBCD$ cuando C es el punto medio de $\overline{PQ}$.

2.8 Con una hoja de cartón de 5 cm de lado se construye una caja sin tapa de base cuadrada. Exprese el volumen de la caja en función de su altura e indique el dominio de tal función.





2.9 Un comerciante compra una partida de x kg de café y la vende en las siguientes condiciones: la mitad a $ 3 el kg, la tercera parte a $ 2,50 el kg y el resto a $ 2 el kg. ¿Cuál es el ingreso de la venta en función de x?

2.10

(i) Dadas $f(x) = x^3 + 2$, $g(t) = t^2 - 2t$, calcule:

(a) $f(2)$, $f(-3)$ y $f(1/2)$,

(b) $g(0)$, $g(-5)$ y $g(a)$.

(ii) Dada $h(u) = \sqrt{u+2}$:

(a) calcule $h(-2)$ y $h(6)$,

(b) ¿es posible calcular $h(-3)$? ¿por qué?,

(c) halle $Dom(h)$,

(d) ¿para qué valor de u es $h(u) = 10$?

2.11 Dadas las funciones por las prescripciones $f(x) = x^3 + 2$, $g(t) = t^2 - 2t$, $p(u) = \sqrt{u+1} - \sqrt[3]{u-1}$, calcule:

(i) $f(\sqrt{2})$, $f(a-1)$, $f(x+h) - f(x)$,

(ii) $g(2\sqrt{3})$, $g(\pi)$, $g(t+h) - g(t)$,

(iii) $p(3)$, $p(0)$, $p(u+h) - p(u)$.

2.12 Dada $f(x) = \dfrac{1}{2}x$:

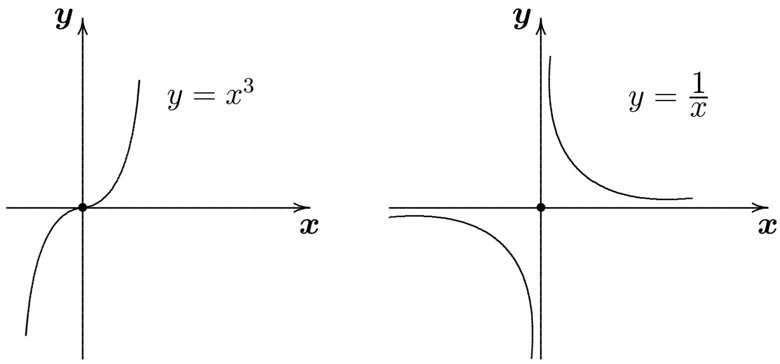
(i) halle el valor de x para el cual $f(x) = 6$,

(ii) verifique que $f(4) + f(5) = f(4+5)$,

(iii) pruebe que para todo par $a, b \in I\!R$ vale $f(a) + f(b) = f(a+b)$,

(iv) pruebe que si $a \in I\!R$ vale $f(ax) = af(x)$ para todo $x \in I\!R$.

2.13 A partir de los gráficos de las funciones $y = \frac{1}{x}$ e $y = x^3$



represente gráficamente:

(i) $y = \dfrac{1}{x} - 2,$ (ii) $y = \dfrac{1}{x+3},$

(iii) $y = \dfrac{1}{x-2} - 1,$ (iv) $y = -\,x^3,$

(v) $y = -\,(x-2)^3,$ (vi) $y = -\,x^3 + 4.$

2.14 Halle el dominio de las siguientes funciones. Justifique la respuesta.

(i) $y = -x^2 + 2,$ (ii) $y = 3x^3 + 2x^2 - 1,$

(iii) $y = \sqrt{x},$ (iv) $y = \sqrt{x^2 + 4},$

(v) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-2} - 1},$ (vi) $y = \dfrac{1}{3x+2} - \dfrac{1}{x-5}.$

2.15 Sean $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 4, 5\}$, $C = \{1, 2, 5\}$ y $D = \{m, n, p\}$, y sean $f : A \longrightarrow B$, $g : C \longrightarrow D$. Calcule $g \circ f$, en cada uno de los siguientes casos:

(i)

x	$f(x)$
a	1
b	1
c	5
d	4

x	$g(x)$
1	m
2	n
5	p

(ii)

x	a	b	c	d
$f(x)$	1	2	4	2

x	1	2	5
$g(x)$	m	p	p

2.16 Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = x - 2,$$

$$g(x) = -\frac{1}{2}\,x,$$

$$h(x) = -2x + 1.$$

Calcule

(i)	$(f \circ g)(x)$,	(ii)	$(g \circ f)(x)$,	(iii)	$(f \circ h)(x)$,
(iv)	$(f \circ g)(a)$,	(v)	$(g \circ h)(x)$,	(vi)	$(h \circ f)(x)$,
(vii)	$(f \circ g)(-2)$,	(viii)	$(h \circ f)(7)$.		

2.17 La ganancia g que origina la venta de un producto depende del costo c del mismo, que a su vez depende de la cantidad s en existencia. Las respectivas dependencias están dadas por:

$$g(c) = 2c^2 - 5,$$

$$c(s) = \frac{6}{s}.$$

Encuentre la fórmula que expresa a la ganancia g como función de la existencia s.

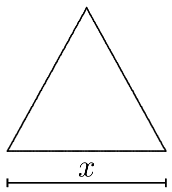
3 Funciones lineales. Rectas

3.1 Determine la función lineal que da:

(i) el área y de un rectángulo de base 5 y altura x,

(ii) el perímetro y de un rectángulo de base x, cuya altura mide el doble de la base.

3.2 La medida de cada uno de los lados de igual medida de un triángulo isósceles supera a la medida x de su base en una unidad. Determine la función lineal que da el perímetro y del triángulo en función de x.



3.3

(i) Grafique las rectas definidas por las siguientes ecuaciones

(a) $y = 3$, (b) $2x = -10$,

(c) $y = 2x - 3$, (d) $5x + 2y - 1 = 0$.

(ii) Determine si los puntos:

(e) $A = (3, 1)$, $B = (5, 0)$ y $C = (-1, -3)$ pertenecen a la recta de ecuación $3x - y = 0$,

(f) $M = (3, 5/2)$, $N = (-1, -7/2)$ y $P = (1/3, -3/2)$ están alineados,

(g) Encuentre dos puntos (a_1, b_1) y (a_2, b_2) que pertenezcan a la recta de ecuación $3x - y = 0$.

3.4

(a) Represente los siguientes pares de puntos en un sistema cartesiano de coordenadas. Dibuje la recta que cada par de ellos determina, y, en los casos posibles, calcule su pendiente.

(i) $P_0 = (3, -4)$, $P_1 = (5, 2)$, (ii) $P_0 = (-2, 1)$, $P_1 = (4, -3)$,

(iii) $P_0 = (1/2, 2)$, $P_1 = (6, 2)$, (iv) $P_0 = (-6, -1)$, $P_1 = (-6, -4)$,

(v) $P_0 = (1, 2)$, $P_1 = (-2, 2)$, (vi) $P_0 = (7/8, 3/4)$, $P_1 = (5/4, -1/4)$.

(b) Calcule el punto medio de cada uno de los segmentos $\overline{P_0P_1}$ del inciso (a)

3.5 Encuentre a, si la recta que pasa por los puntos:

(i) $(1,2)$ y $(-1,-1)$ es paralela a la que pasa por $(-4,-1)$ y $(a,-3)$,

(ii) $(1,2)$ y $(-1,-1)$ es perpendicular a la que pasa por $(-4,-1)$ y $(a,-3)$.

3.6 Determine las ecuaciones de las rectas que satisfacen, respectivamente, las siguientes condiciones:

(i) pasa por $(0,0)$ y tiene pendiente 8,

(ii) pasa por $(1/4,-1/2)$ y corta al eje x en $(1/8,0)$,

(iii) tiene ordenada al origen 8 y pendiente 1,

(iv) pasa por $(10,-3/2)$ y tiene pendiente 0,

(v) pasa por $(1,2)$ y es paralela a la recta de ecuación $4x+2y=1$,

(vi) pasa por $(1/2,-1)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $3x+4y-12=0$,

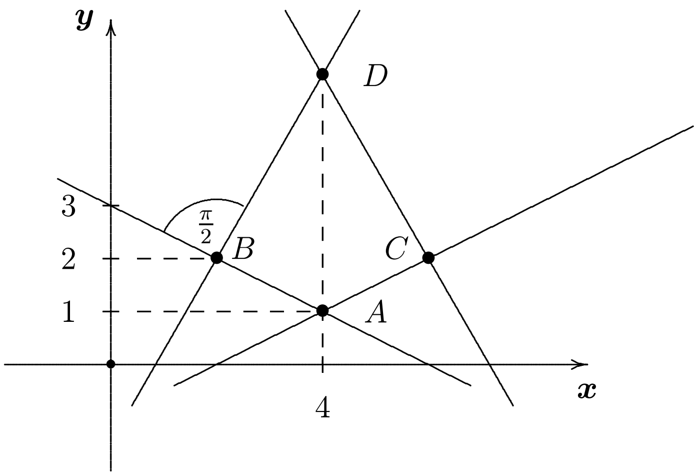
(vii) pasa por $(3,9)$ y $(3,-2)$.

(viii) grafique la o las rectas que aparecen en los casos (i) a (vii).

3.7 Con los datos de la figura:

(i) Halle las ecuaciones de las rectas que contienen respectivamente a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BD}$.

(ii) Determine las coordenadas de D.



3.8 Halle $a, b \in \mathbb{R}$ de modo tal que las rectas $l_1 : \; -3x + 2y - 4 = 0$ y $l_2 : \; 3ax + 2y - b = 0$, sean:

(i) paralelas y distintas,

(ii) coincidentes,

(iii) perpendiculares.

3.9 Halle un punto C de modo que sea el vértice de un triángulo isósceles cuyos restantes vértices son $A = (-1, 0)$ y $B = (3, 2)$. Compruebe que el punto hallado satisface la condición requerida.

3.10 Halle el conjunto de puntos del plano tales que su distancia a $P_0 = (4, 3)$ es igual a la distancia a $P_1 = (5, 7)$.

4 Ecuaciones lineales con dos incógnitas

4.1 Clasifique, resuelva e interprete geométricamente los siguientes sistemas de ecuaciones lineales (s.e.l.):

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} y = 2x \\ 3x + y - 5 = 0 \end{cases}, \qquad \text{(ii)} \quad \begin{cases} x = 3 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases},$$

$$\text{(iii)} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{2} - y = \dfrac{4}{3} \\ 3x + y - 5 = 0 \end{cases}, \qquad \text{(iv)} \quad \begin{cases} -2x + 3y - 1 = 0 \\ 8x - 12y + 4 = 0 \end{cases}.$$

4.2 Compruebe que el s.e.l.

$$\begin{cases} \dfrac{2x - 2y}{2} = -\dfrac{1}{2} \\ -4x + 4y = 2 \end{cases},$$

es compatible indeterminado. Halle la solución general y determine dos soluciones particulares.

4.3 Determine $a \in I\!R$ de modo tal que el s.e.l.

$$\begin{cases} a\,x + \dfrac{5}{3}\,a\,y = -\dfrac{1}{3} \\ -3\,a\,x - \dfrac{5}{a}\,y = a \end{cases},$$

sea:

(i) incompatible,

(ii) compatible determinado,

(iii) compatible indeterminado.

4.4 Escriba un s.e.l. que no tenga solución. Interprete geométricamente.

4.5 Determine las coordenadas del centro de un cuadrado de vértices $A = (0, 0)$, $B = (1, 2)$, $C = (-2, 1)$ y $D = (-1, 3)$.

4.6 Los lados de un paralelogramo están contenidos en las rectas $l_1 : \; y = -2x + 6$, $l_2 : \; y = -2x + 3$, $l_3 : \; y = x$ y $l_4 : \; y = x - 9$. Halle:

(i) los vértices del paralelogramo,

(ii) el área del paralelogramo.

4.7 El numerador de cierta fracción es 5 unidades mayor que el denominador. Si el numerador se disminuye en 9 y el denominador se aumenta en 1, la fracción resultante es $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es la fracción original?

4.8 Un avión, volando a favor del viento, recorre 1080 km en 6 hs., mientras que volando en contra, recorre la tercera parte de la distancia en la mitad del tiempo. Calcule la velocidad del avión al volar sin viento, y la velocidad del viento.

4.9 Un comerciante vende 84 pares de medias a dos precios distintos: unos pares a $4,50 cada uno y los otros a $3,60, recaudando en la venta $310,50. ¿Cuántos pares de medias de cada clase vendió?

4.10 En un triángulo isósceles la suma de la base y de la altura es igual a 40 cm. Si se agregan 12 cm a la base se obtiene $\frac{9}{4}$ de la altura. Calcule el perímetro del triángulo.

4.11 La edad de María más el duplo de la edad de Pedro es catorce. El duplo de la edad de María dentro de cuatro años será la de Pedro dentro de seis años. Calcule la edad actual de ambos.

4.12 Halle la edad de dos hermanas sabiendo que, la edad de la mayor supera en cuatro años los $\frac{8}{7}$ de la edad de la menor, y que dividiendo la edad de la mayor por la de la menor, el cociente es 1 y el resto es 6.

5 Funciones cuadráticas

5.1 Grafique las siguientes funciones cuadráticas e indique su imagen:

(i) $y = -2x^2$, (ii) $y = (x-5)^2$,

(iii) $y = (x+1)^2 - 3$ (iv) $y = -2x^2 - 12x - 14$,

(v) $y = \dfrac{1}{3}(x-1)^2 + 2$, (vi) $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x - \dfrac{9}{2}$

5.2 Determine, sin recurrir a la gráfica de la función, si los puntos $(0,2)$, $(3,-6)$ y $(-2,-2/3)$ pertenecen a la gráfica de $y = x^2 + \dfrac{10}{3}x + 2$.

5.3 Determine para qué valores de k la gráfica de $y = 2kx^2 + 1$ pasa por los puntos:

(i) $(1,1)$,

(ii) $(-1/2, 5)$.

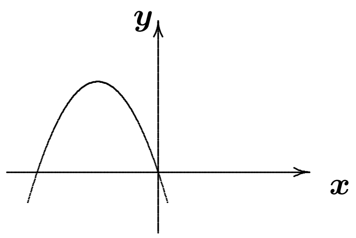
5.4 Halle la función cuadrática f tal que $f(0) = 2$, $f(-1) = 5$ y $f(1/2) = 1$.

5.5 Indique cuál ó cúales de las siguientes gráficas corresponde a una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ que verifique:

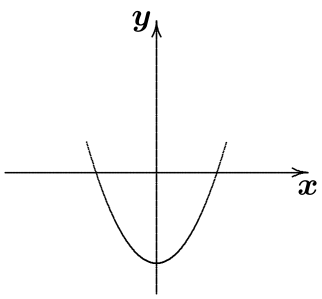
(i) $a > 0$, $c < 0$, (ii) $a > 0$, $c = 0$,

(iii) $a < 0$, $b = 0$, (iv) $a < 0$, $c > 0$,

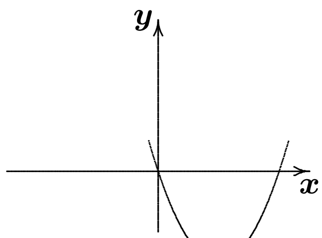
(1)



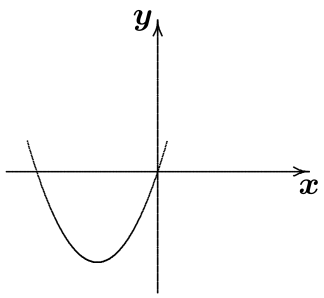
(2)



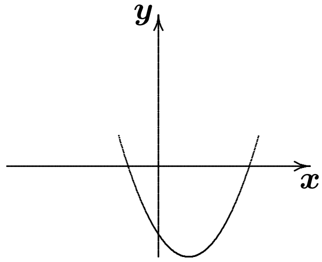
(3)



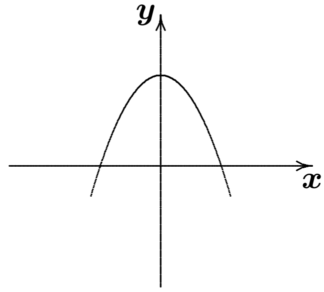
(4)



(5)



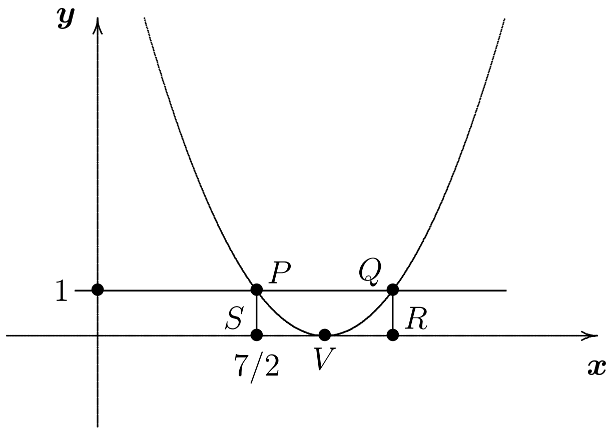
(6)



5.6 Complete la siguiente tabla:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	intersección con eje x	intersección con eje y	vértice	$Im(f)$
$f(x) = 5x^2$				
$f(x) = -5x^2 - 3$				
$f(x) = -5x^2 + 2$				
$f(x) = -x^2 + 2x$				
$f(x) = x^2 + 4x - 12$				

5.7 Halle la ecuación de la parábola indicada en la figura



sabiendo que:

(i) se obtiene desplazando la parábola $y = ax^2$,

(ii) la recta $y = 1$ la corta en el punto $P = (7/2, 1)$,

(iii) el área del rectángulo $\overset{\square}{PQRS}$ vale 3.

5.8 Obtenga, a partir del gráfico de las funciones

(i) $y = -x^2 + 3x$, (ii) $y = 3x^2 - 3x - 6$,

los subconjuntos de números reales en los cuales las funciones dadas toman valores:

(a) positivas,

(b) negativas o nulas.

5.9 Si se aumenta la base y la altura de un rectángulo en 2 m su área es igual a 99 m^2. Si la base se reduce en 2 m resulta un cuadrado. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

5.10 Halle dos números naturales impares consecutivos tales que su producto sea 255.

5.11 La superficie de un triángulo es de 70 cm^2. ¿Cuál es su altura si se sabe que excede a la base en 4 cm?

5.12 Dada una caja sin tapa, de base cuadrada, de 80 cm^2 de superficie lateral, determinar el lado de la base si éste excede en 1 cm a la altura de la caja.

5.13 Un grupo de jubilados decide hacer una excursión a Copahue en micro. El costo del alquiler del mismo es de \$200, a pagar en partes iguales. En el momento del viaje, cuatro jubilados deciden no ir y para cubrir el total de la excursión, los restantes deben abonar \$2,5 más cada uno. ¿Cuál es el total de jubilados que viajaron?

5.14 Determine las dimensiones del jardín rectangular de mayor área que puede delimitarse con 100 m de material para cercas.

5.15 Halle las medidas de:

(i) las diagonales de un rombo cuya suma sea 4 y su área máxima,

(ii) los catetos de un triángulo rectángulo de manera tal que su suma sea 10 y su área se máxima.

5.16 Resuelva las siguientes ecuaciones

(i) $x(x + 2 + \frac{x}{2}) = x + 4$, (ii) $x(x + 5) + \frac{5}{2} = 2x$,

(iii) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 6 = 0$, (iv) $2x\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} = -3x\left(x + \frac{2}{3}\right) + \frac{15}{2}$,

(v) $2x^4 - x^2 - 1 = 0$, (vi) $x^4 - 15x^2 = -54$.

(i) $r_1 = -2$, $r_2 = \frac{4}{3}$ (ii) no tiene soluciones reales,

(iii) $r_1 = \frac{1}{3}$, $r_2 = -\frac{1}{2}$, (iv) $r_1 = 1$, $r_2 = -\frac{6}{5}$,

(v) $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, (vi) $r_1 = 3$, $r_2 = -3$, $r_3 = \sqrt{6}$, $r_4 = -\sqrt{6}$.

5.17 Grafique las funciones definidas por:

(i) $y = f(x) = 2x - 1$,

(ii) $y = g(x) = x^2$,

(iii) $y = h(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$,

(iv) $y = m(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$,

(v) $y = n(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ 0 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$,

(vi) $y = p(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$.

6 Polinomios y funciones polinómicas

6.1 Indique si las siguientes expresiones son polinomios:

(i)	$0,$	(ii)	$2t - 5t^3,$
(iii)	$\dfrac{t^2}{t^2+1} - t,$	(iv)	$\dfrac{2}{3}t^4 - 5t^5 + 4t - \sqrt{5} + 2t^2,$
(v)	$t^2 + \sqrt{t} + 1,$	(vi)	$\pi t^7.$

6.2 Complete el siguiente cuadro:

polinomio $\boldsymbol{p}$	grado	coeficiente principal	coeficiente cuadrático	término independiente
$-2t^5 + t^2 - t + 3$				
$t^3 - 3t^2 + 2t - 1$				
$\frac{1}{2}t^2 + \sqrt{3}t$				
$\sqrt{2}t - \frac{3}{5}$				

6.3 Construya un polinomio que verifique:

(i) tiene grado 6 y no tiene término lineal,

(ii) tiene grado 4 y no tiene término cuadrático,

(iii) tiene grado 2 y coeficiente principal -3.

6.4 Escriba los siguientes polinomios en forma completa, primero creciente y luego decreciente:

(i) $\boldsymbol{p} = t^4 + 5t^2 + 3t^5 - 7,$

(ii) $\boldsymbol{q} = -6t - t^3 + 2t^2 - 2t^5 - \sqrt{6}t^6.$

6.5 Dadas las funciones polinómicas definidas por $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 28$ y $q(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$, obtenga los valores $p(-1)$, $p(2)$ y $q(\sqrt{2})$.

6.6 Determine el valor a si:

(i) $p(x) = ax^2 + ax - a$ y $p(2) = 5,$

(ii) $p(x) = ax^3 - 3x + a$ y $p(1/2) = 3/4.$

6.7

(i) Halle tres funciones polinómicas distintas tales que para cada una de ellas la imagen de 3 sea igual a la de -3.

(ii) Determine un polinomio tal que su función polinómica asociada se anule en $x = \dfrac{3}{4}$.

6.8 Dados los polinomios

$$\boldsymbol{p} = 2t^5 + 5t^4 - 3t^2 - 2t - 4,$$

$$\boldsymbol{q} = t^4 - 2t^3 - 3t - 1,$$

$$\boldsymbol{r} = -5t^3,$$

$$\boldsymbol{s} = t^2 - t - 2,$$

determine:

(i) $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$, (ii) $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{s}$, (iii) $\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q})$, (iv) $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{s}$, (v) $\dfrac{1}{3}\boldsymbol{p} - 2\,\boldsymbol{q}$, (vi) $\boldsymbol{s}^2 - 2\,\boldsymbol{q}$.

6.9 Obtenga $a, b \in \mathbb{R}$ de modo tal que se verifique $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}$:

(i) $\boldsymbol{p} = 6t^2 + at + b$, $\quad \boldsymbol{q} = (3t-1)(2t+1)$,

(ii) $\boldsymbol{p} = a(t^2 - t - 2) + b(t-1) + \dfrac{5}{2}(t^2 - 3t + 4)$, $\quad \boldsymbol{q} = 3t^2 + 2t - 1$,

(iii) $\boldsymbol{p} = a(t^2 + t + 3) + b(t^2 - 2t + 1) + \dfrac{7}{16}(t^2 - 3)$, $\quad \boldsymbol{q} = 2t - 1$.

6.10 Halle el cociente $\boldsymbol{c}$ y el resto $\boldsymbol{r}$ de dividir $\boldsymbol{p}$ por $\boldsymbol{q}$ siendo:

(i) $\boldsymbol{p} = t^5 + 4t^4 + \frac{7}{2}t^3 - t + 3$, $\quad \boldsymbol{q} = 2t^3 + 3t - \dfrac{1}{2}$,

(ii) $\boldsymbol{p} = -3t^3 + t^4 + 4t - 2$, $\quad \boldsymbol{q} = t^2 - t + 1$,

(iii) $\boldsymbol{p} = 2t^5 - 5t^4 + 6t^3 - 6t^2 + 4t - 1$, $\quad \boldsymbol{q} = t^2 + t - 1$.

6.11 Aplique la regla de Ruffini para hallar el cociente y el resto de dividir $\boldsymbol{p}$ por $\boldsymbol{q}$:

(i) $\boldsymbol{p} = 2t^4 - 6t^3 + 7t^2 - 5t + 1$, $\quad \boldsymbol{q} = t + 2$,

(ii) $\boldsymbol{p} = 9t^6 - t^4 + t^3 - 3t^2 + 6$, $\quad \boldsymbol{q} = t - 1$,

(iii) $\boldsymbol{p} = 3t^5 + t^4 - 5t^2 - 5$, $\quad \boldsymbol{q} = t + 1$.

6.12 Determine aplicando la definición si los valores $x = 1$, $x = 2$, $x = 0$ y $x = \sqrt{2}$ son raíces de la función polinómica $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

6.13 Sea $q(x) = (1/2)x^2 + (3/4)x - 1/2$. Indique cuáles de los siguientes números son raíces de $q(x)$: 2, -2, 0, 1, -1.

6.14 Determine, aplicando el teorema del resto, si los números indicados son raíces del polinomio respectivo. En caso afirmativo, hallar su orden de multiplicidad.

(i) $\boldsymbol{p} = 3t^4 + 6t^3 + 12t^2 + 24t + 18, \quad a = -2,$

(ii) $\boldsymbol{p} = t^5 - 4t^3 - 8t^2 + 32, \quad a = 2,\ b = -2,$

(iii) $\boldsymbol{p} = 5t^7 + 2t^6 - 3t^5 + 2t^2 + 2t + 8, \quad a = 1,\ b = -3.$

6.15 Calcule las raíces reales de:

(i) $p(x) = x^2 + 1,$ (ii) $q(x) = x^2 - 3,$

(iii) $r(x) = -2x^2 + 5x,$ (iv) $s(x) = x^3 - 2x^2 - 4x,$

(v) $t(x) = x^3 - 2x^2 + 4x.$

6.16

(i) Escriba en cada caso un polinomio que verifiquen la condición indicada:

(a) grado 2 y todas sus raíces son 1, -1,

(b) grado 3, 0 es una raíz doble y 3 es una raíz simple,

(c) el menor grado posible para que los números -2, $\dfrac{1}{3}$ y $-\dfrac{1}{3}$ sean raíces simples.

(ii) ¿Son únicas las soluciones obtenidas en (a), (b) y (c)? En cada caso en que no sea única, obtenga otra distinta.

6.17 Resuelva las siguientes ecuaciones:

(i) $5(x-1) - 2 = 0,$ (ii) $x(2x+3) + 1 = 0,$

(iii) $6\left(x^2 + \dfrac{1}{2}x\right) + 2 = 0,$ (iv) $x^2(x-2) - x + 2 = 0,$

6.18 Calcule el valor k de modo tal que $p(x) = 5kx^2 - (2k+10)x + 4$ tenga una raíz múltiple.

6.19 Halle todas las raíces reales de los siguientes polinomios:

(i) $\boldsymbol{p} = t^6 - 3t^5 + 5t^4 - 7t^3 + 6t^2 - 2t$, sabiendo que 1 es raíz,

(ii) $\boldsymbol{p} = t^4 - t^3 - 22t^2 + 16t + 96$, sabiendo que -2 y 3 son raíces,

(iii) $\boldsymbol{p} = 2t^4 - t^3 - 17t^2 + 15t + 9$, sabiendo que $1 + \sqrt{2}$ y $1 - \sqrt{2}$ son raíces,

(iv) $\boldsymbol{p} = t^4 - 3t^3 + 3t^2 - t$, sabiendo que 1 es raíz.

6.20 En un colegio se desea pintar dos pizarrones cuadrados, uno de lado a^2 y otro de lado a:

(i) halle la función polinómica que expresa la suma de las superficies de dichos pizarrones,

(ii) determine las medidas de los lados de dichos pizarrones sabiendo que la superficie del primero supera en 4 al triplo de la superficie del segundo.

7 Funciones trigonométricas

7.1 Complete los siguientes cuadros:

(i)

medida radial	1	$\frac{\pi}{3}$	$1,5$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{4}{3}\pi$
medida sexagesimal					

(ii)

medida sexagesimal	1	30	45	60	144
medida radial					

7.2

(i) Exprese en radianes los siguientes valores:

(a) $150°$,
(b) $72°$,
(c) $35°\,40'$,
(d) $46°\,20'\,30''$.

(ii) Exprese en grados minutos y segundos los siguientes valores:

(a) $\frac{3}{5}\pi\,\mathrm{rad}$,
(b) $\frac{3}{4}\pi\,\mathrm{rad}$,
(c) $\frac{\pi}{5}\,\mathrm{rad}$,
(d) $2,7\,\mathrm{rad}$.

7.3

(i) Determine la longitud del arco de una circunferencia de 5cm de radio, determinado por un ángulo con vértice en el centro de la misma y que mide $60°$.

(ii) Dos niños juegan en un sube y baja que tiene una longitud de $5,5\,\mathrm{m}$. Al subir uno de los extremos de la barra recorrió un arco de $1,25\,\mathrm{m}$. ¿Cuál es la medida radial del ángulo que describió dicha barra?

7.4 Dos ángulos complementarios son tales que la medida de uno de ellos es $2°$ menor que el triplo de la medida del otro. Halle la medida radial de dichos ángulos.

7.5 Complete las siguientes tablas:

(i)

$\alpha \in (a,b)$	signo de $sen\,\alpha$	signo de $cos\,\alpha$	signo de $tg\,\alpha$
$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$			
$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$			
$\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$			
$\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$			

(ii) (donde $0 \leq a < b < 2\,\pi$)

$\alpha \in (a,b)$	signo de $sec\,\alpha$	signo de $tg\,\alpha$
	$+$	$-$
	$+$	$+$
	$-$	$-$
	$-$	$+$

Sugerencia: haga una interpretación grafica utilizando la circunferencia trigonométrica y argumentos geométricos. Realizar lo indicado suministra una valiosa formación.

7.6 Complete el siguiente cuadro:

θ	$0 \leftrightarrow 0°$	$\frac{\pi}{6} \leftrightarrow 30°$	$\frac{\pi}{4} \leftrightarrow 45°$	$\frac{\pi}{3} \leftrightarrow 60°$	$\frac{\pi}{2} \leftrightarrow 90°$	$\frac{2}{3}\pi \leftrightarrow 120°$	$\frac{7}{6}\pi \leftrightarrow 210°$
$sen\,\theta$							
$cos\,\theta$							
$tg\,\theta$							

Sugerencia: intente verificar que los valores consignados en el cuadro anterior son correctos, utilizando la circunferencia trigonométrica y argumentos geométricos.

7.7 Represente gráficamente en un mismo sistema de coordenadas los siguientes pares de funciones e indique en cada caso dominios e imágenes:

(i) $sen\, x$, con

(a) $3 - senx$, (b) $sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, (c) $sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$,

(ii) $cos\, x$, con:

(d) $-cos\, x$, (e) $2 - cos\, x$, (f) $cos\,(\pi - x) + 2$.

Optativos:

(iii) $sen\, x$, con

(a) $sen\, 2x$, (b) $2\, sen\, x$,

(iv) $cos\, x$, con:

(a) $-cos\, x$, (b) $\frac{1}{2} cos\, x$.

7.8 Determine $cos\,\theta$ y $tg\,\theta$ sabiendo que $sen\,\theta = -\frac{7}{25}$ y que θ es la medida sexagesimal de un ángulo del tercer cuadrante.

7.9 Determine $sen\,\theta$ y $tg\,\theta$ sabiendo que $cos\,\theta = -\frac{1}{2}$ y que θ es la medida sexagesimal de un ángulo del segundo cuadrante.

7.10 Halle los valores de las restantes funciones trigonométricas sabiendo que $tg\,\alpha = -3,7320$ y α es la medida radial de un ángulo del cuarto cuadrante.

7.11 Halle, si es posible, dos valores de x, $0 \leq x < 2\pi$, que sean soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones:

(i) $cos\, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, (ii) $cos\, x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

(iii) $sen\, x = 2$, (iv) $tg\, x = 1$,

(v) $sen\, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, (vi) $sen\, x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7.12 Halle todos los valores de θ, $0° \leq \theta < 360°$, para los cuales se verifica: $sen\,\theta = -\frac{1}{2}$.

7.13 Determine los valores de α, para $0° \leq \alpha < 360°$, tales que:

(i) $sen\, 2\,\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

(ii) $cos\,(2\alpha + 40°) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$,

(iii) $tg\,(90° + \alpha) = -1$.

7.14 Determine el o los valores de x, $0 \leq x < 2\pi$, que son soluciones de las siguientes ecuaciones:

(i) $2\, sen\, x - \sqrt{2} = 0$,

(ii) $3\, cos^2\, x = sen^2\, x$,

(iii) $cos^2\, x - cos\, x = 0$,

(iv) $sec\, x + tg\, x = 0$,

(v) $sen^2\, x + 2\, sen\, x + 1 = 0$.

Nota. A continuación indicaremos sin demostración algunas identidades trigonométricas que podrán ser utilizadas para comprobar otras identidades trigonométricas.

Cualesquiera sean $\alpha, \beta \in I\!R$ se verifican:

(I1) $sen^2\, \alpha + cos^2\, \alpha = 1$,

(I2) $sen\,(-\alpha) = -sen\, \alpha$,

(I3) $cos\,(-\alpha) = cos\, \alpha$,

(I4) $sen(\alpha + \beta) = sen\, \alpha \cdot cos\, \beta + sen\, \beta \cdot cos\, \alpha$,

(I5) $cos(\alpha + \beta) = cos\, \alpha \cdot cos\, \beta - sen\, \alpha \cdot sen\, \beta$.

7.15 Verifique las siguientes identidades trigonométricas:

(a) $sen\, 2\alpha = 2\, sen\, \alpha\, cos\, \alpha$,

(b) $sen\, \alpha = 2\, sen\, \left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\, cos\, \left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$,

(c) $cos\, 2\alpha = cos^2\, \alpha - sen^2\, \alpha$,

(d) $cos\, \alpha = cos^2\, \left(\dfrac{\alpha}{2}\right) - sen^2\, \left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$,

(e) $1 + cos\, 2\alpha = 2\, cos^2\, \alpha$,

(f) $1 + cos\, \alpha = 2\, cos^2\, \left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$,

(g) $1 - cos\, 2\alpha = 2\, sen^2\, \alpha$,

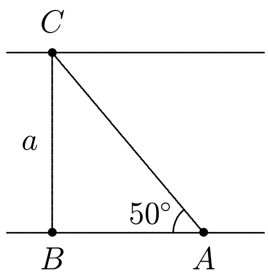
(h) $1 - cos\, \alpha = 2\, sen^2\, \left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

7.16 La diagonal de un rectángulo mide 12 cm y forma un ángulo de 52° con uno de sus lados. Determine el perímetro del rectángulo.

7.17 Un poste se quiebra. La parte superior se inclina formando con la parte inferior un ángulo de $70°$. El extremo superior toca el piso a una distancia de $2,10\,\mathrm{m}$ del pie del poste. Determine la longitud del poste.

7.18 Una escalera de $7\,\mathrm{m}$ apoyada en la pared de una casa forma un ángulo de $75°$ con el suelo. ¿A qué distancia de la pared se encuentra el pie de la escalera?

7.19 Un biólogo desea determinar el ancho de un río, para colocar adecuadamente los instrumentos de estudio de polución. Partiendo del punto B camina $100\,\mathrm{m}$ hasta llegar al punto A. Desde allí mira el punto C observando ángulo de $\theta = 50°$ (ver figura). ¿Qué ancho tiene el río?



7.20 Desde un punto A situado a nivel del suelo los ángulos de elevación de la punta D y de la base B de una antena situada en la cumbre de una colina miden $47°54'$ y $39°45'$. Determine la altura de la colina si la altura de la antena es de $115,5$m.

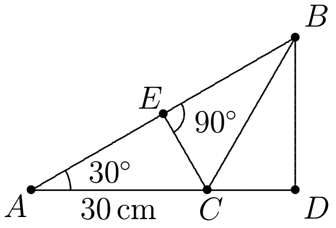
7.21 Una persona de $1,80\,\mathrm{m}$ de altura está a $3,60\,\mathrm{m}$ del pie de una farola y proyecta una sombra de $2,40\,\mathrm{m}$ de largo ¿ Cuál es el alto de la farola?

7.22 Tres ciudades A, B y C se hallan unidas dos a dos por caminos rectos. Los dos caminos que llegan a C determinan un ángulo de $90°$. La distancia entre A y C es de $75\,\mathrm{km}$ y la distancia entre B y C es de $100\,\mathrm{km}$ ¿ Cuántos km de más recorre una persona si para ir de A a B pasa por C?

7.23 Dos caminos rectos se cruzan formando un ángulo de $75°$. Sobre uno de ellos, a $300\,\mathrm{m}$ del cruce hay una estación de servicio ¿Cuál es la distancia mínima de dicha estación hasta el otro camino?

7.24 Un hombre conduce un vehículo sobre tramo de camino que mide 300km y que forma con la horizontal un ángulo de $20°$. ¿ Cuánto ascendió sobre la horizontal en el momento que recorrió la tercera parte del camino?

7.25 Sabiendo que el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ de la figura es isósceles, que $\overline{AC}$ mide $30\,\mathrm{cm}$ y que $\widehat{A} = 30°$, calcule la medida de los lados del triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ADB}$.



7.26 El hexágono de la figura está inscripto en la circunferencia de radio $r = 3$.

(a) Determine:

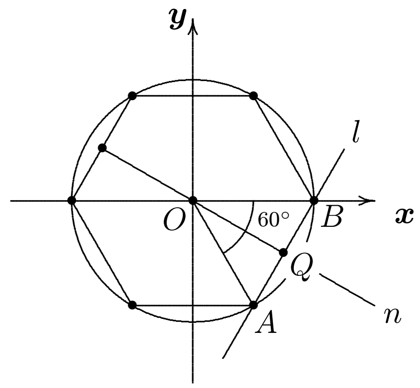
(i) las coordenadas del punto A,

(ii) la ecuación de la recta l que contiene al lado $\overline{AB}$,

(iii) la ecuación de la recta n que pasa por el origen y es perpendicular a l,

(iv) la longitud de la apotema $\overline{OQ}$.

(b) Verifique que el área del hexágono es igual a la mitad del producto entre el perímetro y la apotema.



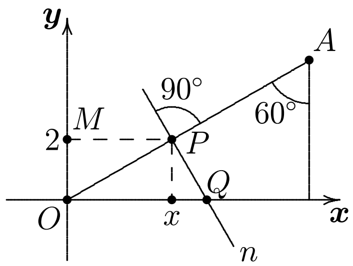
7.27 Con los datos de la figura, determine:

(i) la medida sexagesimal del ángulo $O\overset{<}{P}M$, la longitud de $\overline{OP}$ y la absisa x de P,

(ii) la longitud del segmento $\overline{MP}$,

(iii) la ecuación de la recta n,

(iv) el punto Q y la longitud del segmento $\overline{OQ}$.


y
A
90°
60°
M
2
P
Q
O
x
x
n